Laboratoire temps et fréquence

# Algorithme de l'échelle de temps UTC(CH)

**L'échelle de temps suisse UTC(CH) est une échelle de temps calculée. Chacune des 5 horloges atomiques participant à l'élaboration de UTC(CH) produit une échelle de temps observable et mesurable sous la forme d'un signal 1-PPS (1 impulsion par seconde) et d'un signal RF sinusoidal à la fréquence standard de 5-MHz. UTC(CH) est une valeur moyenne pondérée des échelles de temps individuelles obtenue par l'application de l'algorithme AT1 élaboré par le NIST en 1968.**

## Introduction

L'algorithme AT1 est décrit dans le document de référence [1].

Chaque horloge atomique $i \in \{1,2,3,...N\}$ a un état $x_i(t)$ et une marche (fréquence relative) $y_i(t)$ par rapport à l'échelle de temps UTC(CH) qui sert d'horloge de référence.

L'algorithme AT1 est récursif et discret. La mise à jour des variables d'état se fait chaque jour pour l'époque UTC 00:00. $t+\tau$ désigne l'époque pour laquelle nous voulons calculer les nouveaux états aujourd'hui. $t$ désigne l'époque de la mise à jour d'hier pour laquelle les états sont déjà connus.

## Mise à jour des états

Une prédiction $\hat{x}_i(t+\tau)$ de l'état de l'horloge $i$ pour aujourd'hui est calculée à partir de l'état d'hier $x_i(t)$ et de la marche d'hier $y_i(t)$.

$$\hat{x}_i(t+\tau) = x_i(t) + y_i(t) \times \tau \tag{1}$$

La mise à jour de l'état de chaque horloge pour aujourd'hui $x_i(t+\tau)$ est donnée par la somme pondérée des différences entre les états prédits des horloges et la valeur mesurée des différences d'état entre les horloges. Cette équation est l'équation fondamentale de l'échelle de temps :

$$x_i(t+\tau) = \sum_{j=1}^{n} w_j(t)\left[\hat{x}_j(t+\tau) - x_{ji}(t+\tau)\right] \tag{2}$$

où les termes $x_{ji}(t+\tau)$ sont les différences d'état mesurées entre les horloges.

$$x_{ji}(t+\tau) = x_j(t+\tau) - x_i(t+\tau) = x_{jk}(t+\tau) - x_{ik}(t+\tau) \tag{3}$$

Comme les poids associés à chaque horloge sont définis en fonction des erreurs de prédiction, qui sont elles-mêmes fonction des états, ceux-ci ne peuvent être mis à jour qu'une fois les nouveaux états déterminés. Ceci explique pourquoi ce sont les poids d'hier $w_i(t)$ qui sont utilisés dans (2).

**Mise à jour des marches**

La marche de chaque horloge $i$ doit aussi être mise à jour pour l'époque d'aujourd'ui.

La première étape consiste à définir un estimateur de la marche actuelle, basé sur les deux derniers états connus :

$$\hat{y}_i(t+\tau) = \frac{x_i(t+\tau) - x_i(t)}{\tau}. \tag{4}$$

La seconde étape consiste à mettre à jour la marche moyenne $y_i(t+\tau)$ pour aujourd'hui à l'aide d'un filtre exponentiel :

$$y_i(t+\tau) = \frac{\hat{y}_i(t+\tau) + m_i y_i(t)}{1+m_i} \tag{5}$$

où $m_i$ est la constante de temps du filtre exponentiel. Théoriquement il existe une constante de temps optimale pour chaque horloge. La constante de temps optimale minimise l'erreur sur la prédiction de l'état de l'horloge.

**Mise à jour des poids**

Le poids de chaque horloge dans l'échelle de temps doit également être mis à jour.

Il faut d'abord mettre à jour l'estimateur de l'erreur sur la prédiction $\hat{\varepsilon}_i(t+\tau)$,

$$\hat{\varepsilon}_i(t+\tau) = \left|\hat{x}_i(t+\tau) - x_i(t+\tau)\right| - K_i(t). \tag{6}$$

Le biais $K_i(t)$ doit être corrigé pour chaque horloge. Ce biais s'explique par le fait que l'erreur sur la prédiction de l'état de l'horloge $i$ n'est pas statistiquement indépendante de l'échelle de temps puisque l'horloge $i$ a contribué à l'élaboration de cette dernière.

Comme l'estimateur du biais, équation (10), est fonction des erreurs de prédiction, il ne peut être mis à jour qu'après la mise à jour de l'estimateur des erreurs de prédiction.

L'erreur de prédiction moyenne est mise à jour par le filtrage exponentiel de l'estimation actuelle combinée avec la dernière estimation de la valeur moyenne :

$$\varepsilon_i^2(t+\tau) = \frac{\hat{\varepsilon}_i^2(t+\tau) + m\varepsilon_i^2(t)}{1+m}. \tag{7}$$

On estime que dans ce cas il n'est pas nécessaire d'optimiser la constante de temps $m$ individuellement pour chaque horloge. Une constante de temps de 30 jours est normalement utilisée pour le filtrage exponentiel.

Une fois la valeur moyenne de l'erreur de prédiction mise à jour pour chaque horloge, il devient possible de mettre à jour l'erreur de prédiction globale $\varepsilon_x^2(t+\tau)$ qui est définie comme

$$\varepsilon_x^2(t+\tau) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\varepsilon_j^2(t+\tau)}\right)}. \tag{8}$$

Finalement le poids individuel de chaque horloge peut être mis à jour,

$$w_i(t+\tau) = \frac{\varepsilon_x^2(t+\tau)}{\varepsilon_i^2(t+\tau)}, \tag{9}$$

ainsi que le biais $K_i(t)$,

$$K_i(t+\tau) = \frac{2\varepsilon_x^2(t+\tau)}{\sqrt{2\pi\varepsilon_i^2(t+\tau)}}. \tag{10}$$

**Relation de fermeture**

S.R. Stein [2] a démontré que dans tous les algorithmes d'échelles de temps il y a nécessairement une relation de fermeture, même lorsque celle-ci n'est pas énoncée explicitement.

En effet si N horloges participent à l'élaboration d'une échelle de temps, on ne dispose que de N-1 mesures de différences d'état pour le calcul de l'échelle de temps.

On dispose donc de N-1 équations pour déterminer l'état de N horloges. En d'autres termes le problème de la détermination de l'échelle de temps est nécessairement sous-déterminé. On est donc obligé d'ajouter artificiellement une condition de fermeture.

En termes philosophiques on peut dire que la connaissance du temps absolu est impossible puisque seules les différences entre les horloges sont observables. Si jamais il existe un terme commun (biais de temps, biais de fréquence ou dérive du biais de fréquence) qui affecte toutes les horloges de l'ensemble, celui-ci ne sera jamais détecté tout simplement parce qu'il n'est pas observable.

L'introduction d'une relation de fermeture revient à supposer que la somme pondérée de toutes les horloges prises en compte dans l'élaboration d'une échelle de temps n'est pas biaisée par rapport au temps absolu. Comme cette hypothèse n'est pas vérifiable, aussi bien être optimiste et supposer qu'elle est vraie.

Dans le cas de l'algorithme AT1 on observe que les différences mesurées entre les horloges ont la propriété suivante :

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_{ji}(t+\tau) = \sum_{j=1}^{n} w_j(t)\left[x_j(t+\tau) - x_i(t+\tau)\right] = \sum_{j=1}^{n} w_j(t) x_j(t+\tau) - x_i(t+\tau) \tag{11}$$

puisque $\sum_{j=1}^{n} w_j(t) = 1$.

D'autre part l'équation fondamentale (2) peut être développée comme

$$x_i(t+\tau)=\sum_{j=1}^{n} w_j(t)\hat{x}_j(t+\tau)-\sum_{j=1}^{n} w_j(t)x_{ji}(t+\tau). \tag{12}$$

En substituant (11) dans (12) on obtient

$$x_i(t+\tau)=\sum_{j=1}^{n} w_j(t)\hat{x}_j(t+\tau)-\sum_{j=1}^{n} w_j(t)x_j(t+\tau)+x_i(t+\tau), \tag{13}$$

ce qui nous donne explicitement la relation de fermeture:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j(t)\left[\hat{x}_j(t+\tau)-x_j(t+\tau)\right]=0\,. \tag{14}$$

La relation de fermeture suppose que la somme pondérée de l'erreur de prédiction sur l'ensemble de toutes les horloges est nulle.

**Stabilité de l'échelle de temps**

La propriété la plus remarquable de l'échelle de temps calculée vient de l'équation (8) qui définit l'erreur de prédiction globale.

L'équation (8) signifie que même la plus instable des horloges participant à l'élaboration de l'échelle de temps calculée contribue à diminuer l'erreur globale sur la prédiction.

Cela implique que l'échelle de temps calculée est plus stable que la plus stable des horloges contribuant à son élaboration.

**Références**


[1] Weiss M., Weissert T., **A New Time Scale Algorithm: AT1 Plus Frequency Variance**, *Metrologia* 1991, vol. 28, pp. 65-74.

[2] Stein S.R., **Time Scales Demystified**, *Proc. Joint 2003 IEEE IFCS and 17th EFTF*, Tampa, Florida, USA, May 2003, pp. 223-227.

L'Office fédéral de métrologie (METAS) réalise les étalons de référence nationaux de la Suisse, s'occupe de leur reconnaissance au niveau international et met ces étalons de référence au niveau de précision requis à disposition de la recherche, de l'économie et de la société. METAS veille à ce que les mesures nécessaires à la protection et à la sécurité de la population et de l'environnement puissent être faites de manière correcte et conformément aux prescriptions légales.

**Contact**

Dr. Laurent-Guy Bernier
Collaborateur scientifique

**Office fédéral de métrologie METAS**
Lindenweg 50, CH-3003 Bern-Wabern
tél. +41 31 32 34645
laurent-guy.bernier@metas.ch
www.metas.ch

Janvier 2007