Über Grössen, Einheiten und Einheitensysteme

Ulrich Feller

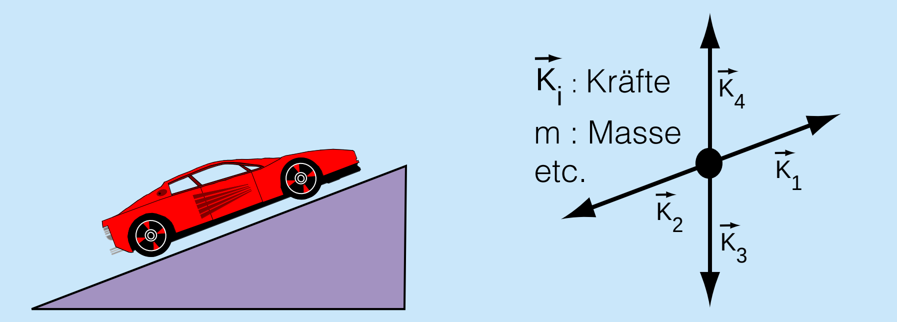
Physikalische Grössen sind für den Physiker oder den Ingenieur ein selbstverständliches Werkzeug in seiner täglichen Arbeit. Mit Messungen bestimmt er ihre Werte, wobei er sich seit 1960 des Internationalen Einheitensystems SI bedienen kann [1]. Damit ist er in der Lage, weltweit verständliche und vergleichbare Masse anzugeben.

Bei dieser Ausgangslage stellt sich die Frage, was es denn über einen so alten und wohlbekannten Gegenstand noch zu schreiben gibt. Es ist tatsächlich so, dass der Gebrauch von Grössen und Einheiten für die Lösung messtechnischer Probleme seit der Einführung eines einheitlichen Masssystems kaum mehr praktische Schwierigkeiten bietet. Wie so oft in der Wissenschaft stösst man aber auf Fragen und Probleme, wenn man sich über den Gebrauchszweck hinweg auch für dahinterliegende erkenntnistheoretische Zusammenhänge interessiert. Dabei stösst man auf Fragestellungen wie die folgenden: Was sind physikalische Grössen und Einheiten? Was ist ein physikalisches Einheitensystem? Durch was wird es festgelegt? Das internationale Einheitensystem SI basiert bekanntlich auf sieben Basiseinheiten und einer Anzahl abgeleiteter Einheiten. Was sind Basiseinheiten, und durch was unterscheiden sie sich von den abgeleiteten Einheiten? Wieviele Basiseinheiten braucht es, um ein Einheitensystem festzulegen?

Obwohl das Internationale Einheitensystem in vielen einführenden Lehrbüchern der Physik und der Chemie erklärt wird, werden die oben gestellten Fragen kaum behandelt. In diesem Aufsatz werden bekannte Aussagen zum SI kritisch hinterfragt. Der konstruktive Zugang, der hier eingeschlagen wird, führt uns auf eine Darstellung, die sich von der traditionellen Darstellung des SI deutlich unterscheidet.

Physikalische Grössen

Jedermann hat eine intuitive Vorstellung davon, was eine physikalische Grösse wie Zeit, Masse, Länge, Kraft, elektrische Stromstärke usw. bedeutet. Wir verwenden diese Grössen zur Beschreibung von Naturerscheinungen in unserer Umwelt. Durch den Umgang mit diesen Begriffen entwikkelt sich im Laufe der Zeit ein intuitives Verständnis dafür. Es ist jedoch schwierig, für diese Begriffe eine kurze, verständliche und brauchbare Definition anzugeben. Lehrbücher helfen uns auch nicht weiter, denn physikalische Grössen werden gewöhnlich nicht definiert, sondern für die Beschreibung bestimmter Sachverhalte von Naturerscheinungen eingeführt. Physikalische Grössen sind gedankliche Abstraktionen dieser Sachverhalte und werden durch abstrakte mathematische Variablen dargestellt. In den physikalischen Theorien werden die Eigenschaften dieser Variablen und ihrer Beziehungen untereinander beschrieben (Naturgesetze), und es wird erklärt, in welcher Beziehung die Grössen zur beobachtbaren Natur stehen.



Naturerscheinung mit all ihren verschiedenen Aspekten oder Sachverhalten

Beschreibung mit abstrakten Konzepten wie Kraft, Masse, Geschwindigkeit, Schallpegel etc.

Figur 1: Natürliche Sachverhalte (links) werden in der Physik durch abstrakte mathematische Variablen dargestellt (rechts).

Aus diesen Ausführungen lässt sich leicht schliessen, warum es für physikalische Grössen im Allgemeinen keine kurzen und einfachen Definitionen gibt: So vielfältig die in der Natur beobachtbaren Sachverhalte sind, so vielfältig sind auch die Eigenschaften ihrer gedanklichen Abstraktionen, den physikalischen Grössen! Diese Vielfalt an Eigenschaften und Beziehungen lässt sich gewöhnlich nicht in ein paar Sätzen zusammenfassen; dazu braucht es die Theorien, welche wir aus Naturbeobachtungen gewinnen und die wir mit der Natur vergleichen müssen. Die vermutlich einzig richtige, wenn auch nicht sehr hilfreiche Definition des Begriffs „Grösse“ ist, eine Grösse als die Summe ihrer Eigenschaften und Beziehungen zu anderen Grössen aufzufassen. Je mehr wir von diesen Eigenschaften und Beziehungen kennen, desto besser ist unser Verständnis von dieser Grösse. Dieses Verständnis ist immer zu einem gewissen Grade subjektiv: Ein Ingenieur der Hochspannungstechnik wird für die elektrischen Grössen ein anderes Verständnis haben als ein Digitalelektroniker, und dieser wiederum ein anderes Verständnis als der theoretische Physiker!

Dieses operationale Verständnis einer physikalischen Grösse wird von Richard Feynmann, Nobelpreisträger der Physik, am Beispiel des Begriffs „Energie” sehr schön beschrieben [2]: „… there is a certain quantity, which we call energy, that does not change in the manifold changes which nature undergoes. That is a most abstract idea, because it is a mathematical principle.… It is not a description of a mechanism, or anything concrete; it is just a strange fact that we can calculate some number and when we finish watching nature going through her tricks and calculate the number again, it is the same. … It is important to realize that in physics today, we have no knowledge of what energy *is*".

Leider wird in der Metrologie zwischen beobachtbarem Sachverhalt einer Naturerscheinung und davon abstrahierter Grösse nicht scharf unterschieden, was dem klaren Verständnis nicht unbedingt förderlich ist. Im Internationalen Wörterbuch der Metrologie [3] wird „Grösse" wie folgt definiert:

Eigenschaft eines Phänomens, eines Körpers oder einer Substanz, die qualitativ beschrieben und quantitativ ermittelt werden kann. Die Benennung „Grösse" kann sich auf eine Grösse im allgemeinen Sinn oder auf eine spezielle Grösse beziehen.

Beispiele:
- Grössen im allgemeinen Sinn: Länge, Zeit, Masse, …
- Spezielle Grössen:
  - Länge eines gegebenen Stabes, elektrischer Widerstand eines gegebenen Drahtes, …

Die Definition „im allgemeinen Sinne" entspricht unserer oben beschriebenen Betrachtungsweise, sofern „Eigenschaft" als abstraktes Abbild eines bestimmten Sachverhalts des Phänomens, Körpers oder der Substanz interpretiert wird. Zu Verwirrung führt vor allem die zweite Verwendung des Begriffs: Die Längen von zwei verschiedenen Stäben wären in dieser Sprechweise zwei verschiedene Grössen, die erst noch von der Grösse „Länge" im allgemeinen Sinne verschieden wären. Es ist evident, dass dieser Sprachgebrauch zu einem Durcheinander von beobachtbarer Natur und abstrakten Konzepten führen muss, weil nicht mehr unterschieden werden kann, ob wir vom „Phänomen" selber oder von einem abstrakten Objekt, wie es eine mathematische Variable darstellt, sprechen.

Auf dieser Basis ist eine logisch saubere Erklärung von Begriffen wie „Einheit" oder „Messung" nicht möglich. Wir werden deshalb den Begriff „Grösse" in den folgenden Ausführungen nur im Sinne einer gedanklichen Abstraktion verstehen, die wir von der beobachtbaren Natur ableiten. In dieser Betrachtungsweise - wie sie in der Physik übrigens üblich ist - gibt es beispielsweise nur *eine* Grösse, die wir „Länge" nennen. Diese Grösse können wir benutzen, um Ausdehnungen beliebiger Art im Raum zu beschreiben; und wenn wir von der Länge eines gegebenen Stabes sprechen, ist dabei nicht die Länge das „Spezielle", sondern der „gegebene Stab", den wir mit Hilfe des Begriffs „Länge" beschreiben.

Der Einfachheit halber werden wir in den folgenden Ausführungen anstelle von Phänomen, Körper, Substanz etc. den Sammelbegriff „Naturerscheinung" verwenden. Die Naturerscheinung selber, von der wir einen Aspekt mit Hilfe einer physikalischen Grösse beschreiben können, werden wir als „Realisierung" der Grösse bezeichnen. In dieser Sprechweise ist der Stab, dessen Länge wir bestimmen, eine *Realisierung* der Grösse „Länge", und der Draht, dessen Widerstand bestimmt wird, eine *Realisierung* der Grösse „elektrischer Widerstand". Damit werden beobachtbare Naturerscheinungen und davon abgeleitete, abstrakte Begriffe, wie es physikalische Grössen mit all ihren mathematischen Eigenschaften sind, begrifflich sauber auseinandergehalten.

Einheiten

Wir haben oben ausgeführt, dass physikalische Grössen dazu verwendet werden, bestimmte Aspekte/Sachverhalte von Naturerscheinungen zu beschreiben. Bei diesem Vorgang wird die Grösse dem beobachteten Aspekt der Naturerscheinung zugeordnet (Figur 2).

Die Zuordnung einer physikalischen Grösse zu einem wohldefinierten Sachverhalt einer Naturerscheinung erlaubt, der Grösse einen numerischen Wert zuzuordnen, welcher für den Sachverhalt charakteristisch ist. Die Gesamtheit der Tätigkeiten, welche zur Ermittlung des numerischen Wertes einer Grösse führt, wird als Messung bezeichnet [3]. Wichtig ist die Feststellung, dass der Wert einer Grösse nur bestimmt werden kann, wenn diese eindeutig einem Sachverhalt einer Naturerscheinung zugeordnet ist. Dies sei an folgendem Beispiel verdeutlicht: „Die Länge beträgt 3.5 m". Dieser sprachlich richtige Satz ist inhaltslos, wenn nicht gesagt wird, welchem beobachtbaren Sachverhalt die Grösse „Länge" zugeordnet ist.

Die Zuordnung numerischer Werte dient dem Vergleich gleichartiger Sachverhalte: Wir können beispielsweise sagen, ob die Länge eines Stabes gleich gross, grösser oder kleiner als die Länge eines zweiten Stabes ist, und wir können quantifizieren, wievielmal grösser oder kleiner der erste als der zweite ist. Wir können beispielsweise sagen, dass der erste Stab 2.5 mal so gross ist wie der zweite Stab.

Wieso brauchen wir Einheiten?

Solange jeder Mensch nur für sich selber Messungen durchführt, kann er seine eigenen Einheiten benutzen. Die Aussage „2.5 mal so gross wie der zweite Stab" macht für ihn einen Sinn. Sobald er diese Aussage einem zweiten Menschen mitteilen will, muss er sicherstellen, dass dieser weiss, wie lang der zweite Stab ist. Sonst ist es eine Aussage, mit der dieser nichts anfangen kann. Damit wir nun nicht jedesmal angeben müssen, mit was der gemessene Stab verglichen wurde, müssen wir einen Referenzstab bezeichnen, den jederman kennt. Wir können dann jede gemessene Länge als Bruchteil oder Vielfaches dieses Referenzstabes angeben, und jeder, der weiss, wie lange der Referenzstab

Figur 2: Der Naturerscheinung als Realisierung physikalischer Grössen werden physikalische Grössen (rechts) zugeordnet.

ist, weiss, was die angegebene Länge bedeutet. Ein solcher Referenzstab könnte als „Einheit der Länge” bezeichnet werden. Wenn alle Längenangaben als Bruchteil oder Vielfaches dieses Referenzstabes angegeben werden, hat dieser Referenzstab per Definition die Länge 1. Damit wir bei einer Zahlenangabe sofort wissen, dass es sich um eine Längenangabe handelt, können wir einer solchen Zahlenangabe zusätzlich eine Bezeichnung anfügen, die darauf hinweist, dass sich die Zahl auf den Referenzstab bezieht.

Wichtig sind folgende Feststellungen:

1. Der Referenzstab selber muss nicht gemessen werden: Er hat per Definition die Länge 1.
2. Die Länge des Referenzstabes hat *keine* Messunsicherheit, da sie nicht gemessen wird, sondern per Definition 1 gesetzt wird.
3. Der Referenzstab ist eine Realisierung der Grösse ”Länge”. Jede andere Realisierung der Länge kann direkt oder über eine Folge mehrerer Vergleiche mit dem Referenzstab verglichen werden. Für diese Vergleiche ist es nicht nötig, die Einheit anderer Grössen zu kennen.

Auf die gleiche Art und Weise, wie wir eine mögliche quantitative Bestimmung der Länge mit Hilfe eines Referenzstabes beschrieben haben, wird die Grösse „Masse” quantitativ festgelegt (siehe Rahmen).

Die Einheit ist bekanntlich realisiert durch einen wohldefinierten Zylinder aus einer Platin-Iridium-Legierung, den sogenannten „internationalen Prototypen des Kilogramms”, der im Bureau International des Poids et Mesures in Sèvres bei Paris aufbewahrt wird. Dieser derart definierten Einheit der Masse wurde die Bezeichnung „Kilogramm” gegeben. Jede Massenangabe wird als Vielfaches oder Bruchteil davon angegeben.

In den oben aufgeführten Beispielen ist die Einheit aus drei Elementen aufgebaut:

- Einer Realisierung der Grösse,
- der zugeordneten Zahl 1 und
- einer Bezeichnung, welche die Einheit kennzeichnet.

Die Bezeichnung ist fakultativ: Wenn klar ist, auf *welche Grösse* sich die Zahl bezieht, ist eine Bezeichnung nicht nötig. Damit soll nicht eine Empfehlung für das Weglassen der Einheitsbezeichnung abgegeben werden, wir wollen nur darauf hinweisen, dass es, um eine Grösse quantitativ festzulegen, nicht notwendig ist, der Einheit einen Namen zu geben. Von dieser Möglichkeit machen Hochenergiephysiker oft Gebrauch.

Referenzmasse

Wir haben nun gesehen, wie es prinzipiell möglich ist, eine Grösse quantitativ so festzulegen, dass ihr Wert bestimmt und andern Menschen mitgeteilt werden kann. Wir haben auch gesehen, dass die Grösse „Masse” auf diese Art festgelegt ist. Dies ist jedoch die einzige Grösse, die quantitativ so fixiert wird. Alle anderen Grössen der Physik sind heute quantitativ anders festgelegt.

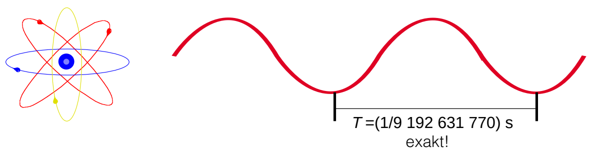
Zuerst müssen wir das oben angegebene Verfahren verallgemeinern: Damit der Wert einer Grösse bestimmt werden kann, ist es nicht nötig, den Vergleich mit der Einheit durchzuführen. Zum gleichen Ziel gelangen wir auch, wenn wir mit einer beliebigen Realisierung der gleichen Grösse vergleichen, deren Wert wir kennen. Dies sei wiederum am Beispiel zweier Stäbe ausgeführt. Vom ersten Stab wissen wir, dass er 2.5 Einheiten lang ist. Wenn wir feststellen, dass ein zweiter Stab 7 mal länger ist als der erste Stab, dann ist dessen Länge natürlich 7x2.5 Einheiten = 17.5 Einheiten lang. Wenn wir den ersten Stab nun zum Referenzstab für alle Längenmessungen erklären und diesem Stab durch Vereinbarung die Länge 2.5 Einheiten zuordnen, dann hat *dieser* Stab die Referenzlänge, auf die sich alle Längenangaben beziehen. Dieser Stab wäre dann die einzige Längenrealisierung, deren Wert exakt, d.h. ohne Messunsicherheit wäre, da der Wert nicht gemessen, sondern durch Vereinbarung festgelegt worden wäre. Die Einheit der Länge könnte nur approximativ realisiert werden, und jede Längenangabe wäre letztlich nicht auf die Einheit bezogen, sondern auf die Länge des Referenzstabes mit dem Wert 2.5 Einheiten. Ein solches Vorgehen ist sinnvoll, weil es uns erlaubt, eine beliebige Realisierung als Vergleichsreferenz auszuwählen, welche die dazu geeigneten Eigenschaften aufweist. Mit der Zuordnung einer Masszahl ungleich 1 können wir zudem erreichen, dass die im täglichen Gebrauch zu ermittelnden Messwerte eine handliche Grösse erhalten.

Realisierung der Zeit

Mit dieser Verallgemeinerung sind wir nun auch in der Lage, Messwerte der Zeit zu analysieren. Bekanntlich ist die Einheit der Zeit die Sekunde. Es gab jedoch nie eine Zeitrealisierung, deren Wert durch Vereinbarung 1 gesetzt wurde. Zeit- oder Zeitintervallangaben bezogen und beziehen sich deshalb letztlich auch nicht auf die Sekunde, sondern auf eine andere

Definition der Masseneinheit:
Das Kilogramm ist die Einheit der Masse. Es ist gleich der Masse des internationalen Prototyps des Kilogrammes.

Definition der Zeiteinheit:
Die Sekunde ist die Dauer von 9’192’631’770 Perioden der Strahlung, welche dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes des Cäsium-133 Atoms entspricht.



Die Formalisierung dieser Definition führt auf die Beziehung

$1s = 9‘192‘631‘770 \cdot T$, oder $T = 1/9‘192‘631‘770\ s$. (1)

T: Periode der bezeichneten Cs-Strahlung

Die Periode *T* hat *keine* Messunsicherheit, da sie nicht gemessen, sondern durch diese Definition festgelegt wird.

Zeitintervall-Realisierung, deren Wert durch Vereinbarung festgelegt wurde. Früher war dies die mittlere Tageslänge, der per Definition der Wert 86'400 s zugeordnet wurde. Heute ist es die Periode einer elektromagnetischen Strahlung, deren Wert durch Vereinbarung festgelegt ist.

Alle anderen Werte der Grösse Zeit müssen gemessen werden. Selbstverständlich wird die Einheit der Zeit, die Sekunde, mit Uhren und Frequenznormalen zum Zwecke der Zeitmessung auch realisiert, z.B. mit sogenannten Cäsiumnormalen. Diese Realisierungen sind aber alle mit Unsicherheit behaftet und beziehen sich direkt oder über mehrere Stufen auf die festgelegte Periodendauer der genau bezeichneten Cäsiumstrahlung [4].

Wie wir nun gesehen haben, können die Werte einer physikalischen Grösse auch nach folgendem Verfahren eindeutig festgelegt werden:

1. Wähle die Grösse Q, die quantitativ festgelegt werden soll.
2. Wähle eine wohldefinierte und geeignete Realisierung der Grösse Q (Referenzrealisierung).
3. Ordne der Grösse Q, die ihrerseits der Referenzrealisierung zugeordnet ist, einen festen Wert zu.
4. Gib dieser Grössenrealisierung mit dem zugeordneten Wert eine Bezeichnung, welche sie eindeutig kennzeichnet (Dieser Punkt ist fakultativ).

Alle anderen Realisierungen der Grösse können wir nach dieser Festlegung direkt oder über mehrere Stufen mit dieser Referenzrealisierung vergleichen. Dieses Vorgehen werden wir in den folgenden Ausführungen als "Konventionalfestlegung" bezeichnen. Wichtig sind die folgenden Feststellungen:

- Ein Wert, der durch eine solche Konventionalfestlegung einer Grösse zugeordnet wurde, hat per Definition *keine* Messunsicherheit.
- Eine Grösse darf höchstens *eine* Konventionalfestlegung besitzen. Alle anderen Werte müssen durch Messen bestimmt werden. Der Bezug einer beliebigen Realisierung auf verschiedene Referenzrealisierungen derselben Grösse würde sonst nämlich auf verschiedene Werte führen, was natürlich ein Widerspruch wäre!
- Die Konventionalfestlegung braucht nicht die Einheit zu betreffen, sie legt die Einheit der Grösse aber eindeutig fest. Die Einheit ist rückverfolgbar (in Englisch: traceable) auf die Konventionalfestlegung.

Allgemein besteht die Einheit einer Grösse somit aus folgenden Elementen:

- Einer Vorschrift, welche angibt, wie die Grösse mit dem Wert 1 realisiert wird,
- der Zahl 1 und
- einer Bezeichnung, welche die Einheit kennzeichnet (fakultativ; siehe oben).

Die Einheiten im SI können nur annäherungsweise realisiert werden, d.h. ihre Realisierungen sind immer mit einer Messunsicherheit behaftet. Die einzige Ausnahme ist das Kilogramm, das mittels einer Konventionalfestlegung festgelegt ist.

Wir könnten nun versucht sein, jede Grösse mit einer geeigneten Konventionalfestlegung quantitativ zu fixieren. Dies würde uns erlauben, jede Grösse zu messen. Die Kenntnis der Werte anderer Grössen wäre dazu nicht notwendig. Es ist aber offensichtlich, dass dies auch zu Widersprüchen führen würde: Physikalische Grössen sind bekanntlich nicht isolierte Objekte. Damit sind wir am Punkt angelangt, wo wir uns Überlegungen über Einheitensysteme machen müssen.

Konstruktion eines Einheitensystems

Die Aufgabe eines Einheitensystems ist, genau soviele geeignete Konventionalfestlegungen anzugeben, wie für die quantitative Festlegung aller physikalischen Grössen, die zur Beschreibung der Natur verwendet werden, nötig sind. Es dürfen auch nicht mehr Konventionalfestlegungen als nötig getroffen werden, weil dies zu einer Überbestimmung der Grössen und damit zu Widersprüchen führen würde. Da die Festlegung der elektrischen Einheiten historisch bedeutend mehr Kopfzerbrechen verursacht hat als die Festlegung der mechanischen Einheiten, werden wir uns hier aus Platzgründen auf die mechanischen Einheiten beschränken. Mit den elektrischen Einheiten des SI und anderer Einheitensysteme werden wir uns in einem späteren Artikel im Detail auseinandersetzen.

Mit den bekannten Naturgesetzen lassen sich alle mechanischen Grössen als Funktionen von Masse, Zeit und Länge darstellen. Es genügt deshalb, diese drei Grössen mit je einer Konventionalfestlegung quantitativ festzulegen und alle anderen Grössen mit Hilfe der physikalischen Gesetze von diesen Grössen abzuleiten. Im SI werden die drei ersten Grössen deshalb als „Basisgrössen", alle anderen mechanischen Grössen aber als „abgeleitete Grössen" bezeichnet. Wir wollen nun genauer untersuchen, welches die Konventionalfestlegungen sind, die heute die mechanischen Grössen festlegen.

Wir haben oben gesehen, dass die Definition der Masseneinheit selber eine Konventionalfestlegung ist, und dass die Zeiteinheit als das Vielfache der Periode einer genau definierten elektromagnetischen Welle ebenfalls mittels Konventionalfestlegung bestimmt wird. Wie steht es mit der Einheit der Länge? Zwischen 1889 und 1960 war die Einheit der Länge analog zur Masse definiert durch die Länge eines Meter-Prototyps aus einer PtIr-Legierung bei der Temperatur des schmelzenden Eises. Der Wert der Länge dieses Prototyps war per Definition 1 m. In dieser Zeit war auch die Länge mit einer eigenen Konventionalfestlegung quantitativ bestimmt. Nach einer kurzen Übergangsdauer, während der die Wellenlänge einer Kryptonstrahlung die Längeneinheit festlegte, wurde 1983 die heute noch gültige Definition des Meters eingeführt (siehe Rahmen)

Die Naturerscheinung, welche dieser Definition zugrunde liegt, ist Licht, welches sich mit der invarianten Geschwindigkeit c im Vakuum ausbreitet. Licht ist unter anderem eine Realisierung der Grösse „Geschwindigkeit", welcher ein fester Wert zugeordnet wird. Dem Wert wird in der Meterdefinition implizit die Bezeichnung m/s gegeben, die ihn als einen Geschwindigkeitswert kennzeichnet. Durch die Festlegung von c ist die Einheit der Geschwindigkeit natürlich festgelegt. Analog zur Definition der Sekunde könnten wir sagen: Die Einheit der Geschwindigkeit ist der 299'792'458te Teil der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht im Vaku-

Definition der Längeneinheit Meter:
Der Meter ist die Länge der Strecke, die das Licht im Vakuum während der Dauer von 1/299'792'458 Sekunde durchläuft.

Die Formalisierung dieser Definition führt auf die Beziehung

$$1\ \mathrm{m} = c \cdot \Delta t,\ \text{mit}\ \Delta t = \frac{1}{299'\,792'\,458}\ \mathrm{s}.\ \text{Daraus folgt}: c = 299'\,792'\,458\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \qquad (2)$$

c: Geschwindigkeit des Lichts im Vakuum.

Die Geschwindigkeit des Lichts im Vakuum hat *keine* Messunsicherheit, da sie nicht gemessen, sondern durch diese Definition festgelegt wird.

um. Die Lichtgeschwindigkeit *c* bietet sich für die Festlegung einer Einheit besonders an, weil sie überall im Universum, unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters, gleich gross ist.

Die Einheit der Länge, der Meter, wird nach (2) von der Zeiteinheit s abgeleitet. Für ihre Realisierung ist die Kenntnis einer anderen Grösse nötig, nämlich der Zeit oder der Frequenz.

Diese Tatsache führt oft zu Verwirrung: Es wird argumentiert, dass Raum und Zeit doch nicht das Gleiche seien und nicht voneinander abgeleitet werden können. Dieses Argument geht aber am Kern der Sache vorbei. Die Tatsache, dass Raum und Zeit nicht voneinander abgeleitet werden können, geht aus dem Umstand hervor, dass mit der quantitativen Festlegung der Grössen „Masse" und „Zeit" allein die mechanischen Grössen nicht festgelegt sind. Es braucht eine weitere Konventionalfestlegung, die auf der Realisierung einer Grösse beruht, die nur im Raum möglich ist.

Wir können nun angeben, welche Konventionalfestlegungen heute die mechanischen Grössen im SI quantitativ eindeutig festlegen:

1. Der Prototyp des Kilogrammes mit dem Wert 1 kg,
2. Die Periode der genau bezeichneten Cs-Strahlung mit dem Wert T=1/9'192'631'770 s,
3. Die Lichtgeschwindigkeit mit dem Wert c=299'792'458 m/s.

Es gibt keine weiteren Werte mechanischer Grössen, welche exakt, d.h. ohne Messunsicherheit sind, da sie von den drei oben angegebenen Werten durch Messung abgeleitet werden müssen.

Basis- und abgeleitete Einheiten

Wir sind nun in der Lage, die eingangs gestellten Fragen zu Basis- und abgeleiteten Einheiten genauer zu untersuchen. Basiseinheiten werden in der Literatur wie folgt beschrieben:

Die Generalkonferenz für Mass und Gewicht (CGPM) „…décida de fonder le Système International sur un choix de sept unités bien définies que l'on convient de considérer comme indépendantes du point de vue dimensionel…" [5].

Und im Internationalen Wörterbuch der Metrologie (VIM;[3]) lesen wir: „Basiseinheit: Einheit einer Basisgrösse in einem Grössensystem". „Basisgrösse: Eine der Grössen eines Grössensystems, die aufgrund einer Vereinbarung als unabhängig von den anderen Grössen gilt".

Abgesehen davon, dass der Begriff „Dimension" üblicherweise auf physikalische Grössen angewendet wird und nicht auf Einheiten, ist die erste Definition auch deshalb nichtssagend, weil nicht gesagt wird, was „…indépendantes du point de vue dimensionel…" heissen soll. Beide Definitionen widersprechen dem Umstand, dass Abhängigkeit und Unabhängigkeit zwischen Grössen nicht durch Vereinbarung festgelegt werden können, sondern durch verifizierbare physikalische Gesetze gegeben sind. Das Internationale Wörterbuch schliesslich könnte glauben lassen, dass es zur Beschreibung der Natur verschiedene Grössensysteme gibt, was natürlich nicht der Fall ist. Was es dagegen gibt, sind verschiedene Einheitensysteme, d.h. Systeme von Regeln, nach denen die physikalischen Grössen quantitativ fixiert werden. Für das Verständnis der Einheitensysteme ist es deshalb nicht dienlich, wie im VIM den Begriff der „Basiseinheit" auf jenen der „Basisgrösse" zurückzuführen.

Wie wir gesehen haben, ist im SI der Wert von *c* durch Vereinbarung festgelegt. Länge und Zeit sind über die Beziehungen $\Delta l = c \cdot \Delta t$ oder $\lambda = c/\nu$ (λ: Wellenlänge; ν: Frequenz) linear miteinander verknüpft. Es darf deshalb nur noch eine der beiden Grössen quantitativ frei festgelegt werden. Da die Zeit über eine Konventionalfestlegung quantitativ bestimmt ist, müssen die Werte der Basisgrösse „Länge" mit einer der oben angegebenen Beziehungen *abgeleitet* werden. Ohne es hier explizite auszuführen, gilt das Gleiche auch für die Basisgrösse „Lichtstärke": Ihre Einheit, die Candela, wird aus anderen SI-Einheiten abgeleitet.

Der Einheitenspezialist könnte einwenden, dass im SI die „abgeleiteten Einheiten" *kohärent* aus den Basiseinheiten abgeleitet werden, das heisst einzig durch Multiplikation und Division von Basiseinheiten, ohne zusätzliche Zahlenfaktoren zu benutzen. Es ist tatsächlich so, dass der Meter und die Candela nicht kohärent aus den anderen Basiseinheiten abgeleitet werden.

Für die Ableitung des Meters muss beispielsweise der Zahlenfaktor der Lichtgeschwindigkeit *c* gegeben sein. Eine genauere Prüfung der abgeleiteten Einheiten zeigt aber, dass sie nicht konsequent kohärent abgeleitet sind: Die Einheiten der magnetischen Permeabilität μ und der Dielektrizitätszahl ε sind durch Konventionalfestlegungen bestimmt, und nicht etwa aus dem Quotienten der magnetischen Feldgrössen B/H respektive D/E. Ihre Vakuumwerte μ_0 und ε_0 sind nämlich exakt. Wie wir früher gesehen haben, schliesst dies eine Ableitung ihrer Einheiten aus anderen Einheiten aus.

Wir werden in einem spätern Artikel über elektrische Einheiten zeigen, dass die elektromagnetischen Grössen im SI durch die mechanischen Grössen und eine Konventionalfestlegung für μ_0 quantitativ alle festgelegt sind.

Wieviele Einheiten braucht es?

Diese etwas ausführliche Diskussion zeigt, dass die Begriffe „Basiseinheit" und „abgeleitete Einheit" im SI nicht mit den funktionalen Beziehungen übereinstimmen, wie sie durch Konventionalfestlegung und Ableitung mittels physikalischer Gesetze gegeben sind. Wenn aber Basiseinheiten wie im SI funktional voneinander nicht unabhängig sind, verliert die eingangs gestellte Frage, wieviele Basiseinheiten es zur Festlegung eines Einheitensystems braucht, ihren Sinn: Eine Basiseinheit wird aufgrund ihrer Bedeutung für das tägliche Leben oder anderer, nicht mathematischer Kriterien so bezeichnet. Es führt auch zu keinem Widerspruch, beliebige Einheiten unter Anwendung der Naturgesetze abzuleiten und zu verwenden, solange die Rückverfolgbarkeit auf die Konventionalfestlegungen klar gegeben ist. Anders verhält es sich dagegen mit den Konventionalfestlegungen. Diese sind funktional unabhängig voneinander, und ihre Zahl ist gegeben durch die Anzahl Grössen, welche für die Beschreibung der Natur verwendet werden, abzüglich der zu einem gegebenen Zeitpunkt bekannten Naturgesetze, welche diese Grössen miteinander verbinden. Diese Zahl kann nicht davon abhängen, wie die Grössen im Detail quantitativ festgelegt werden. Dies sei an einem Beispiel erläutert:

Wir haben oben die drei Konventionalfestlegungen angegeben, welche die mechanischen Grössen im SI festlegen. Mit der Festlegung $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2 (N: Newton, A: Ampere) für die magnetische Permeabilität des Vakuums werden zusätzlich alle elektromagnetischen Grössen quantitativ bestimmbar. Ein anderes, in der theoretischen Physik oft gebrauchtes Einheitensystem geht von den Konventionalfestlegungen $h=c=\mu_0=1$ sowie der festgelegten Periode der Cäsiumstrahlung der Sekundendefinition aus (h: Plancksches Wirkungsquantum, realisiert als Drehimpuls in jedem Elementarteilchen mit Spin≠0). In diesem System sind ebenfalls alle mechanischen und elektromagnetischen Grössen quantitativ festgelegt, und wir sehen, dass dazu genau gleich viele Konventionalfestlegungen notwendig sind wie im SI, nämlich vier. Damit soll zu guter Letzt noch die gelegentlich vorgebrachte Äusserung kommentiert werden, dass die Festlegung einer einzigen Einheit im Prinzip genüge und die Einheiten aller anderen Grössen abgeleitet werden könnten. Dies setzt allerdings voraus, dass die von der Natur vorgegebenen Konstanten h und c durch Konvention festgelegt werden. Wie wir oben gesehen haben, legt eine solche Festlegung auch die Einheit der entsprechenden Grösse fest. Die Äusserung ist deshalb dahingehend zu verstehen, dass die Festlegung einer einzigen, nicht von der Natur vorgegebenen Einheit im Prinzip genügt, um sämtliche Einheiten festzulegen. Es stellt sich allerdings die Frage, ob es dem Verständnis nicht förderlicher wäre, anstelle von den Einheiten generell nur von den Konventionalfestlegungen zu sprechen, welche ein Einheitensystem bestimmen. ■

(e-mail: ulrich.feller@eam.ejpd.inet.ch;
Tel. +41 (0)31 323 32 03

Referenzen

[1] Comptes rendus des séances de la onzième conférence générale des poids et mesures. Bureau International des Poids et Mesures, 11-20 octobre 1960, Sèvres, France.
[2] The Feynman Lectures on Physics, Volume 1. Addison-Wesley, 1963, London.
[3] Internationales Wörterbuch der Metrologie. Beuth Verlag, 1994. Übersetzung von: International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology. ISO, 1993, Genf.
[4] Grundlagen der Zeitmessung - Aufgaben des EAM Zeitlabors. OFMET-Info, Vol. 2, No. 3, 1995.
[5] Le Système International d'Unités (SI), 6e Édition. Bureau International des Poids et Mesures, 1991, Sèvres, France.

Kurzfassung

Physikalische Grössen und das Internationale Einheitensystem SI sind für den Physiker und den Ingenieur zur Mitteilung von Massen und Messwerten ein selbstverständliches „Werkzeug". In vielen Lehrbüchern ist zu lesen, dass das SI auf sieben „Basiseinheiten" aufbaut und die restlichen Einheiten von diesen Basiseinheiten abgeleitet werden. Beschreibungen, was Grössen und Einheiten sind und was es zur Festlegung eines Einheitensystems braucht, ist in der Fachliteratur aber nur schwer zu finden. Der vorliegende Artikel geht diesen Fragen nach und zeigt insbesondere auch, welche Konstanten der Physik dem SI zugrundeliegen.

Résumé

Les grandeurs physiques et le Système international d'unités SI sont des outils indispensables au physicien et à l'ingénieur pour exprimer les mesures. La plupart des ouvrages scolaires mentionnent que le SI repose sur sept unités de base et que toutes les autres unités en sont dérivées. Cependant, dans la littérature spécialisée, la description d' une grandeur et d' une unité ainsi que les conditions pour établir un système d'unités manquent souvent. Le présent article est consacré à ces questions et montre en particulier comment les constantes physiques contribuent à établir le SI.

Riassunto

Le grandezze fisiche e il sistema unitario internazionale SI sono per il fisico e l'ingegnere uno „strumento" evidente per la comunicazione di masse e di valori di misurazione. In molti manuali si può leggere che il SI è fondato su sette „unità di base" e le unità restanti derivano da queste unità di base. È però difficile trovare nelle pubblicazioni specializzate la descrizione di grandezze e unità nonché l'indicazione di quanto è necessario per stabilire un sistema d'unità. Il presente articolo approfondisce tali questioni e mostra in particolare anche quali costanti della fisica stanno alla base del SI.

Summary

For the physicist and the engineer physical quantities and the International System of Units SI are essential „tools" for defining measurement values. In many text books one reads that the SI is founded on seven „base units" and that the remaining units are derived from these base units. Descriptions on what quantities and units are and what is necessary to determine a system of units are, however, very difficult to find in the technical literature. The present article addresses these questions and, in particular, also shows the role of fundamental constants of physics underline setting up the SI.

Teil 2: Elektrische Einheiten

Ulrich Feller

Wir haben im OFMET Info 1/1998 über Grössen, Einheiten und allgemeine Prinzipien zur Konstruktion eines Einheitensystems berichtet [1]. Eine wichtige Rolle spielen die Konventionalfestlegungen. Es wurde gezeigt, dass die mechanischen Grössen im internationalen Einheitensystem SI heute durch je eine Konventionalfestlegung für die Masseneinheit, die Lichtgeschwindigkeit und die Periode einer bestimmten Strahlung des Cäsiumatoms quantitativ festgelegt sind. In diesem Artikel möchten wir zeigen, welche Erkenntnisse den elektrischen Einheiten zugrunde liegen und wie diese im SI festgelegt sind. Erläuterungen zu diesen Themen sind auch heute, fünfzig Jahre nach der Billigung der Amperedefinition durch die Conférence Générale des Poids et Mesures [2] immer noch aktuell. Die Erfahrung zeigt, dass Sinn und Zweck der Amperedefinition, wie sie ursprünglich vom Comité International des Poids et Mesures (CIPM) [3] formuliert wurden, in vielen Lehrbüchern und im Unterricht nicht wiedergegeben werden. Dies erschwert das Verständnis über die elektrischen Einheiten unnötigerweise. Heute stellt sich auch die Frage nach der Bedeutung des Josephson- und des Quantenhalleffektes im SI. Einerseits ist die bekannte Amperedefinition immer noch gültig. Andererseits werden heute elektrische Einheiten weltweit mit den erwähnten Quanteneffekten dargestellt. Ist das nicht ein Widerspruch? Für die Besprechung dieser Fragestellungen müssen wir die wichtigsten Erkenntnisse des Elektromagnetismus kurz in Erinnerung rufen.

Coulombsches und amperesches Gesetz

Die Beobachtungen von Gilbert, Volta, Oersted und vielen anderen Naturforschern zeigten, dass es Erscheinungen in der Natur gibt, welche mit den mechanischen Grössen nicht beschrieben werden können. Sie mussten zur Erklärung ihrer Beobachtungen neue Konzepte einführen, die wir heute mit Begriffen wie Ladung, Stromstärke usw. bezeichnen. Ladungen können erzeugt und mit Elektrometern gemessen werden. Man stellt fest, dass geladene Körper Kräfte aufeinander ausüben und dass es zwei verschiedene Arten der Ladung gibt: Gleichartige Ladungen stossen sich ab, ungleichartige ziehen sich an. Die Beobachtungen können im coulombschen Gesetz zusammengefasst werden. Da die Ladungseinheit noch nicht festgelegt ist, muss eine später festzulegende Konstante k_1 eingefügt werden (Fig. 1).

Die Naturforscher waren bald in der Lage, so etwas wie „Elektrisiermaschinen" zu bauen, mit denen in Metallen ein stetiger Strom von Ladungen erzeugt werden kann, sowie Strommesser, mit denen man feststellen kann, in welchem Verhältnis die Stromstärken in verschiedenen Leiterkreisen stehen. Diese stromführenden Leiter sind selber *nicht* geladen. Die Kräfte sind also nicht elektrostatischer Natur und rühren einzig von der Bewegung der Ladungen her. Die Beobachtungen konnten in allgemeiner Form schliesslich im ampereschen Gesetz zusammengefasst werden. Da die Einheit der Stromstärke noch nicht festgelegt ist, muss das Gesetz mit einer später festzulegenden Konstante k_2 geschrieben werden (Fig. 1).

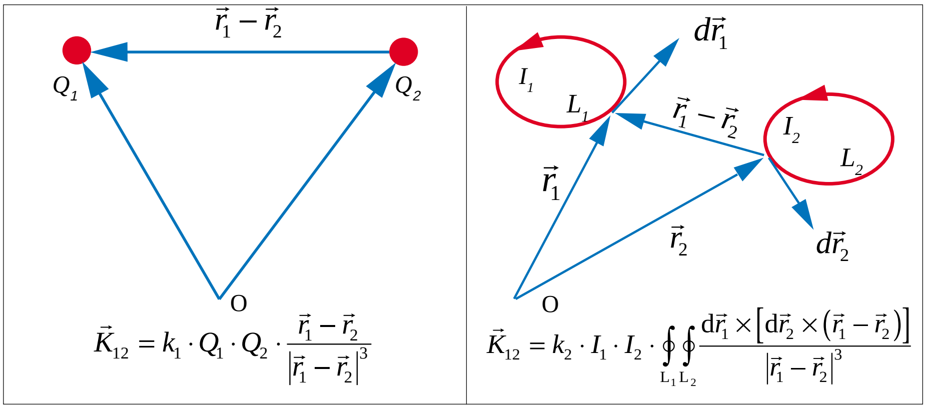
Bemerkenswert ist, dass die beiden Gesetze in der angegebenen Form nicht Bezug auf spezielle Einheiten nehmen. Sie geben einzig die funktionalen Abhängigkeiten zwischen den involvierten Grössen wieder. Jeder Forscher könnte entsprechende Beobachtungen mit diesen Gesetzen beschreiben. Er hätte lediglich die Konstanten k_1 und k_2 entsprechend den verwendeten „Laboreinheiten" anzupassen.

Maxwellsche Gleichungen

Das coulombsche und das amperesche Gesetz fassen viele Erkenntnisse, die beim Experimentieren mit elektrischen Ladungen und Strömen in Abwesenheit polarisierbarer und magnetisierbarer Materie gewonnen werden können, bereits zusammen. Mit Hilfe einiger weiterer, grundlegender Erkenntnisse auf dem Gebiete des Elektromagnetismus konnte Maxwell schliesslich mit rein mathematischen Methoden die berühmten, nach ihm benannten Gleichungen herleiten, welche die elektromagnetischen Naturerscheinungen vollständig beschreiben.

Die Naturgesetze und Konzepte, welche den maxwellschen Gleichungen zugrunde liegen, werden im Fol-

Coulombsches Gesetz (1)   **Amperesches Gesetz** (2)



Figur 1: Kräfte zwischen ruhenden Punktladungen und elektrisch neutralen Stromschlaufen.

genden kurz skizziert. Wir stützen uns dabei auf die ausgezeichnete Darstellung von Stumpf und Schuler [4]. Eine gute Darstellung findet sich auch in [5].

1. Ausgangspunkt sind die beiden Gesetze von Coulomb (1) und Ampere (2). Beide Gesetze sind Fernwirkungsgesetze: Ladung 1 wirkt auf Distanz auf Ladung 2 ein und umgekehrt, desgleichen die beiden Stromkreise.
2. Mit der Einführung des Feldbegriffs können die nur schwer vorstellbaren Fernwirkungsgesetze in Nahwirkungsgesetze übergeführt werden: Ladung und Ströme sind Quellen von Feldern, welche den Raum um sie herum ausfüllen. Es sind diese Felder, welche auf andere Ladungen und Ströme *am Ort der Kraftausübung* wirken. Dazu definieren wir

$$\vec{E}_2(\vec{r}_1) = k_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \,, \qquad (3)$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \alpha \cdot k_2 \cdot I_2 \cdot \oint_{L_2} \frac{d\vec{r}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \,. \qquad (4)$$

Da die elektrische Feldstärke und die magnetische Flussdichte möglicherweise nicht unabhängig voneinander sind, wird in der Definition von B vorerst eine später noch zu bestimmende Konstante α eingefügt. Die beiden Gesetze (1) und (2) erhalten mit diesen Definitionen die einfachere Form

$$\vec{K}_{12} = Q_1 \cdot \vec{E}_2(\vec{r}_1) \qquad \text{und}$$

$$\vec{K}_{12} = \frac{I_1}{\alpha} \cdot \oint_{L_1} d\vec{r}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1) \,.$$

3. Die Beobachtungen zeigen, dass sich die Felder einzelner Quellen (Ladungen, Ströme) in jedem Punkt des Raumes linear überlagern: Es gilt das Überlagerungsgesetz (auch Superpositionsprinzip genannt):

$$\vec{E}_i := \vec{E}(Q_i) \rightarrow \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \,,$$

$$\vec{B}_i := \vec{B}(I_i) \rightarrow \vec{B} = \sum_i \vec{B}_i \,.$$

4. Ladungen und Ströme können räumlich (fast) beliebig fein verteilt und zeitlich veränderlich sein. Solche Ladungs- und Stromverteilungen werden am besten mit kontinuierlichen Ladungsdichten $\rho(\vec{r},t)$ und Stromdichten $j(\vec{r},t)$ beschrieben.
5. Experimente mit zeitlich variablen Magnetfeldern führen zur Entdekkung der elektromagnetischen Induktion: in elektrischen Leitern können Spannungen induziert werden. In differentieller Form lautet das Induktionsgesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r},t) = -k_3 \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \,.$$

Da wir bisher über keine definierten Einheiten verfügen, schreiben wir das Gesetz mit einer weiteren, später noch festzulegenden Konstanten k_3.
6. Genaue Beobachtungen führen auf das Gesetz der Ladungserhaltung: In einem abgegrenzten Bereich des Raumes bewirkt jeder Stromfluss durch die Grenzfläche hindurch eine entsprechende Ladungsänderung im Innern des Bereichs.

Ausgehend von den in den sechs Punkten aufgeführten Erkenntnissen können die maxwellschen Gleichungen (5) - (8) auf Grund rein mathematischer Überlegungen hergeleitet werden. Da bisher nirgends Gebrauch eines speziellen Einheitensystems gemacht werden musste, sind in diesen Gleichungen noch die vier anzupassenden Konstanten k_1, k_2, k_3, und α enthalten.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi k_1 \rho(\vec{r},t) \quad (5) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \quad (6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r},t) = -k_3 \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \quad (7) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r},t) = 4\pi\alpha k_2 \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\alpha k_2}{k_1} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} \quad (8)$$

Gleichungen 5-8: Maxwellgleichungen im Vakuum in einheitenunabhängiger Darstellung.

Genaue Untersuchungen und Beobachtungen zeigten, dass die vier Konstanten nicht unabhängig voneinander sind. Eine einfache Dimensionsbetrachtung der beiden Gesetze (1) und (2) zeigt, dass das Verhältnis k_1/k_2 das Quadrat einer Geschwindigkeit sein muss. Präzisionsmessungen von Weber Mitte des letzten Jahrhunderts ergaben

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2 \,. \qquad (9)$$

Untersuchungen von Hertz führten 1887 zur Entdeckung der elektromagnetischen Wellen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit entsprach im Rahmen der damaligen Messgenauigkeit etwa der Lichtgeschwindigkeit. Das Phänomen elektromagnetischer Wellen wurde von den maxwellschen Gleichungen bereits vorweggenommen. Werden ρ und j darin Null gesetzt, folgt daraus die Wellengleichung. Aus diesen Erkenntnissen lässt sich die Beziehung

$$k_3 \cdot \alpha = 1 \qquad (10)$$

herleiten. Die beiden Konstanten sind nur für die Skalierung der Feldgrössen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ untereinander eingeführt worden und sind für die Festlegung der übrigen elektrischen Grössen nicht relevant.

Von den vier Konstanten sind deshalb nur zwei frei wählbar: Entweder k_1 oder k_2, und α oder k_3.

Elektrische Einheitensysteme

Wichtig ist die Feststellung, dass zur Herleitung der Gleichungen (5) - (8) nirgends Bezug auf ein spezielles Einheitensystem genommen werden muss. Die Grössen, welche zur Beschreibung der elektromagnetischen Naturerscheinungen eingeführt werden, ihre Eigenschaften und die Gesetze, welche diese Grössen untereinander verbinden, sind in allen Einheitensystemen bis auf Skalierungskonstanten identisch. Dies ist logisch und einleuchtend: die Erkenntnisse über die Natur darf nicht davon abhängen, auf welche Art und Weise die numerischen Werte der Grössen festgelegt werden.

Die verschiedenen Einheitensysteme unterscheiden sich nach der

Art und Weise, wie die Konstanten festgelegt werden. Für die bekanntesten Einheitensysteme sind die Konstanten in Tab. 1 angegeben. Im elektrostatischen cgs-System wird die elektrische Ladung numerisch über das coulombsche Gesetz an die mechanischen Einheiten angeschlossen, indem k_1=1 gesetzt wird. Im elektromagnetischen cgs-System wird die Stromstärke numerisch an die mechanischen Einheiten angeschlossen, indem im ampereschen Gesetz k_2=1 geschrieben wird. Im gaussschen Einheitensystem haben k_1 und k_2 denselben Wert wie im elektrostatischen System, zusätzlich wird k_3=1/c gesetzt. Aus dem Induktionsgesetz folgt, dass in diesem Einheitensystem $\vec{E}$ und $\vec{B}$ dimensionsgleich sind. Das Einheitensystem von Heaviside-Lorentz folgt dem gaussschen System, erreicht aber mit dem Faktor 1/4π, dass in den maxwellschen Gleichungen π verschwindet. Einheitensysteme mit dieser Eigenschaft werden rationale Systeme genannt.

Das Internationale Einheitensystem SI ist bis auf Zehnerpotenzen identisch mit dem elektromagnetischen Einheitensystem. Zusätzlich wird aber im SI der Einheit der Stromstärke die Bezeichnung Ampere (Abk. A) gegeben. Nach (2) erhält die Konstante k_2 damit die Einheit N/A². Wie wir in [1] ausgeführt haben, ist die Namengebung für eine Einheit fakultativ. Ein eigener Name für die Einheit der Stromstärke ist aber insofern sinnvoll, als zur Festlegung der elektrischen Einheiten eine zusätzliche Konventionalfestlegung [1] nötig ist. Im SI erfolgt diese durch Festlegung von k_2. In allen hier besprochenen Einheitensystemen werden die elektrischen Einheiten mit der Festlegung der Konstanten k_1 oder k_2 an die mechanischen Einheiten angeschlossen. Diese Situation ist heute unbefriedigend, weil damit die Unsicherheit von mechanischen Messungen und die unbekannte Stabilität des kg-Prototyps [6] auf die elektrischen Einheiten übertragen wird. Diese Abhängigkeit könnte man vermeiden, wenn beispielsweise die elektrische Ladung des Elektrons mit einer Konventionalfestlegung fixiert würde. Da sich der Elektromagnetismus mit der Beobachtung neuartiger Kräfte historisch aus der Mechanik heraus entwickelt hat, ist es jedoch verständlich, dass die elektrischen Einheitensysteme auf die Kraftgesetze aufbauen.

In der Literatur wird im Zusammenhang mit den cgs-Systemen gelegentlich noch von dreidimensionalen Systemen, im Zusammenhang mit den elektromechanischen Einheiten des SI (MKSA) von einem vierdimensionalen Einheitensystem gesprochen [7]. Solche Aussagen sollten vermieden werden, da sie die Gefahr in sich bergen, eine dahinterliegende mathematische Struktur mit der entsprechenden Dimension zu suggerieren. Wie wir oben gesehen haben, kann es eine solche Struktur nicht geben. Alle Einheitensysteme basieren auf vier Konventionalfestlegungen und zwar unabhängig davon, ob eine oder mehrere elektrische Einheiten einen eigenen Namen haben. Nach Festlegung einer der beiden Konstanten k_1 oder

System	k_1	k_2	k_3	α
Elektrostatisch	1	c^{-2}	1	1
Elektromagnetisch	c^2	1	1	1
Gauss	1	c^{-2}	c^{-1}	c
Heaviside-Lorentz	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2}$	c^{-1}	c
SI	$10^{-7}c^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$10^{-7} = \frac{\mu_0}{4\pi}$; $[\mu_0] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$	1	1

Tabelle 1: Das Einheitensystem wird mit der Wahl der Konstanten in den Maxwellgleichungen festgelegt (Gleichungen (5) - (8)).

Definierende Gleichung	SI Einheit	cgs-Einheit el.magn.	cgs-Einheit el.magn. a:=$g^{1/2}\cdot cm^{1/2}\cdot s^{-1}$
$I_{\mathrm{SI}}:\ F/L=\mu_{0,\mathrm{SI}} I_{\mathrm{SI}} I'_{\mathrm{SI}}/(2\pi d)$	A		
$I_{\mathrm{m}}:\ F/L=2 I_{\mathrm{m}} I'_{\mathrm{m}}/d$		$g^{1/2}\cdot cm^{1/2}\cdot s^{-1}$	a
$\mu_{0,\mathrm{SI}}=4\pi\cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$, $\mu_{0,\mathrm{m}}=1$	$kg\cdot m\cdot A^{-2}\cdot s^{-2}$	1	$g\cdot cm\cdot a^{-2}\cdot s^{-2}$
$\varepsilon_{0,\mathrm{SI}}=1/\mu_{0,\mathrm{SI}}c^2$, $\varepsilon_{0,\mathrm{m}}=1/c^2$	$A^2\cdot s^4\cdot kg^{-1}\cdot m^{-3}$	$s^2\cdot cm^{-2}$	$a^2\cdot s^4\cdot g^{-1}\cdot cm^{-3}$
$Q=\int I\mathrm{d}t$	A·s	$g^{1/2}\cdot cm^{1/2}$	a·s
$U=W/Q$	$kg\cdot m^2\cdot A^{-1}\cdot s^{-3}$	$g^{1/2}\cdot cm^{3/2}\cdot s^{-2}$	$g\cdot cm^2\cdot a^{-1}\cdot s^{-3}$
$\vec{E}=\vec{F}/Q$	$kg\cdot m\cdot A^{-1}\cdot s^{-3}$	$g^{1/2}\cdot cm^{1/2}\cdot s^{-2}$	$g\cdot cm\ a^{-1}\cdot s^{-3}$
$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$	$A\cdot s\cdot m^{-2}$	$g^{1/2}\cdot cm^{-3/2}$	$a\cdot s\cdot cm^{-2}$
$\vec{B}:\ \mathrm{d}\vec{F}=I(\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{B})$	$kg\cdot A^{-1}\cdot s^{-2}$	$g^{1/2}\cdot cm^{-1/2}\cdot s^{-1}$	$g\cdot a^{-1}\cdot s^{-2}$
$\vec{H}=\vec{B}/\mu_0$	$A\cdot m^{-1}$	$g^{1/2}\cdot cm^{-1/2}\cdot s^{-1}$	$a\cdot cm^{-1}$
$\Phi=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}$	$kg\cdot m^2\cdot A^{-1}\cdot s^{-2}$	$g^{1/2}\cdot cm^{3/2}\cdot s^{-1}$	$g\cdot cm^2\cdot a^{-1}\cdot s^{-2}$
$R=U/I$	$kg\cdot m^2\cdot A^{-2}\cdot s^{-3}$	$cm\cdot s^{-1}$	$g\cdot cm^2\cdot a^{-2}\cdot s^{-3}$
$C=Q/U$	$A^2\cdot s^4\cdot kg^{-1}\cdot m^{-2}$	$s^2\cdot cm^{-1}$	$a^2\cdot s^4\cdot g^{-1}\cdot cm^{-2}$
$L:\ U=L\cdot\dot{I}$	$kg\cdot m^2\cdot A^{-2}\cdot s^{-2}$	cm	$g\cdot cm^2\cdot a^{-2}\cdot s^{-2}$

Tabelle 2: Das Internationale Einheitensystem (SI) und das elektromagnetische cgs-System sind bis auf Potenzen von 10 identisch, wenn $g^{1/2}\cdot cm^{1/2}\cdot s^{-1}$ durch a (in Analogie zu A im SI) substituiert wird.

k_2 können alle weiteren Einheiten mit Hilfe der bekannten Gesetze des Elektromagnetismus abgeleitet werden. Wir verweisen auf Tabelle 2.

Amperedefinition

Es stellt sich die Frage, was die heutige Amperedefinition mit der hier

> Das Ampere (A) ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fliessend, zwischen diesen Leitern je Meter Leiterlänge die Kraft $2{\cdot}10^{-7}$ Newton hervorrufen würde.

Amperedefinition im Internationalen Einheitensystem (SI).

gegebenen Darstellung der elektrischen Einheiten zu tun hat. Der Zusammenhang wird klar, wenn das amperesche Gesetz (2) auf den Spezialfall zweier gerader, paralleler Drähte angewendet wird. Für diesen Fall nimmt (2) die einfache Form

$$\frac{F}{L} = \mu_0 \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi d} \qquad (11)$$

an. Setzen wir in dieser Formel die Werte aus der Amperedefinition ein, erhalten wir den bekannten Wert von μ_0. Die Amperedefinition gibt zwei Informationen weiter:

1. Die Einheit der Stromstärke trägt die Bezeichnung „Ampere".
2. Der im ampereschen Gesetz festzulegenden Konstante wird ein Wert zugewiesen.

Leider wird in den meisten Zitaten der Amperedefinition verschwiegen, dass die Definition lediglich zur Festlegung von μ_0 dient, und keinesfalls ein Vorschlag zur Realisierung der Stromstärkeneinheit sein soll, wozu die Definition auch denkbar ungeeignet wäre. In [3], p.133, ist zur Definition der elektrischen Einheiten folgendes zu lesen: *„Les définitions données ... ont pour unique objet de fixer la grandeur des unités, et non les méthodes à suivre pour leur réalisation pratique. Cette réalisation s'effectue en accord avec les lois bien connues de l'électromagnetisme. Par exemple, la définition de l'ampère représente uniquement un cas particulier de la formule générale exprimant les forces qui s'exercent entre des conducteurs parcourus par des courants électriques, choisie pour la simplicité de son expression verbale. Elle sert à fixer la constante dans la formule générale qui doit être utilisée pour la réalisation de l'unité."*

Didaktisch ist diese implizite Art der Einheitendefinition problematisch, da der Sinn einer solchen Definitionsweise nicht auf der Hand liegt. So sucht man denn auch in neuesten Publikationen aus Metrologiekreisen zum SI μ_0 vergeblich, obwohl diese Konstante zur Festlegung der elektrischen Einheiten entscheidend ist [8]!

Wie wir bereits gesehen haben, unterscheiden sich das SI und das elektromagnetische Einheitensystem einzig um Potenzen von 10. Die formale Äquivalenz der beiden Systeme wird erzielt, wenn analog zum SI der Stromeinheit ein eigener Name gegeben wird. Wir wählen dafür, in Analogie zum Ampere, die Bezeichnung a, setzen also a:=$g^{1/2}cm^{1/2}s^{-1}$. Mit dieser Substitution verschwinden alle ungeraden Potenzen des cgs-Systems. Kolonne 4 in Tabelle 2 zeigt die formale Äquivalenz zu Kolonne 2, also den SI-Einheiten. Damit ist noch einmal gezeigt, dass die verschiedenen Einheitensysteme gleichwertig sind und die zitierte Verschiedenartigkeit des SI von den anderen Einheitensystemen, was ihre Dimension betrifft, jeglicher mathematischer Grundlage entbehrt.

Unter Bezugnahme auf die Feststellungen in [1] können wir festhalten, dass die mechanischen und elektromagnetischen Grössen im SI quantitativ durch vier Konventionalfestlegungen bestimmt sind. Es betrifft dies den Prototypen des Kilogramms, die Periode eines genau bestimmten Cäsium-Strahlungsüberganges, die Lichtgeschwindigkeit und die magnetische Feldkonstante. Die Werte dieser Grössenrealisierungen sind per Konvention festgelegt und sind deshalb exakt. Alle anderen Werte der mechanischen und elektromagnetischen Grössen werden von diesen vier Festlegungen abgeleitet und sind mit einer Unsicherheit behaftet, mit Ausnahme der elektrischen Feldkonstante, welche eine Kombination von c und μ_0 ist.

Bedeutung des Josephson- und Quantenhalleffektes für die Einheitenfestlegung

Mit dem Josephson- und dem Quantenhallefekt können Spannungs- und Widerstandsmessungen heute routinemässig mit einer relativen Reproduzierbarkeit von einigen 10^{-9} durchgeführt werden [9,10]. Mechanische Messungen haben dagegen eine etwa hundert mal schlechtere Reproduzierbarkeit. Da die Josephsonkonstante $K_J = h/2e$ und die Von-Klitzing-Konstante $R_K = h/e^2$ im SI von mechanischen Messungen abhängen, können Spannungs- und Widerstandsmessungen nicht mit einer kleineren Messunsicherheit durchgeführt werden, als es diese mechanischen Messungen erlauben. Der zur Zeit beste Wert, welcher für Spannungs- und Widerstandskalibrationen seit dem 1. Januar 1990 weltweit verwendet und mit dem Suffix „90" gekennzeichnet wird, beträgt für die Josephsonkonstante

$$K_{J\text{-}90} = 483'597.9(1 \pm 4 \cdot 10^{-7})\ \text{GHz/V}$$

und für die von-Klitzing-Konstante

$$R_{K\text{-}90} = 25'812.807(1 \pm 2 \cdot 10^{-7})\ \Omega$$

Die Unsicherheit dieser Konstanten stellt heute den weitaus grössten Anteil der Messunsicherheit bei Spannungs- und Widerstandskalibrationen mit Josephson- und Quantenhallsystemen dar.

Für die Festlegung der Einheiten im SI sind die beiden Effekte theoretisch ohne Bedeutung. Sie kommen in den Einheitendefinitionen nicht vor. Da sie aber eine Reproduzierbarkeit erlauben, die etwa hundert mal besser ist als ihre Unsicherheit im SI, können elektrische Messungen, die auf Josephson- oder Quantenhallkalibrationen rückverfolgbar sind, heute weit unter ihrer Messunsicherheit miteinander verglichen werden.

Wir müssen aber mit allem Nachdruck darauf hinweisen, dass es - wie bei allen Messungen - nicht zulässig ist, in $K_{J\text{-}90}$ und $R_{K\text{-}90}$ die Messunsicherheit zu unterschlagen. Wir hätten es sonst mit Konventionalfestlegungen zu tun, die logisch mit den das SI definierenden Konventionalfestlegungen inkompatibel wären.

Die künstliche Verschlechterung einer grossen Anzahl elektrischer und atomarer Messungen durch eine Einheitenfestlegung, die auf ein Naturverständnis zurückgeht, das über hundert Jahre zurückreicht, ist natürlich unbefriedigend. Der Weg für eine Verbesserung der Situation ist heute vorgezeichnet: Erstens müsste der kg-Prototyp durch etwas Fundamentaleres ersetzt werden. Hierzu drängt sich die Festlegung des planckschen Wirkungsquantums *h* auf, das in Theorie und Messung eine fundamentale Stellung einnimmt. Mit Hilfe des Wattexperimentes [6] könnte die Masseneinheit dann abgeleitet werden. Zweitens sollten die elektrischen Einheiten nicht mit einem Kraftgesetz auf mechanische Einheiten zurückgeführt werden. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten. Man könnte entweder der Elektronenladung e, der Josephsonkonstanten K_J oder der von-Klitzing-Konstanten R_K einen festen Wert zuordnen. Diese drei Möglichkeiten sind äquivalent, da alle drei Konstanten bei bekanntem h ineinander umgerechnet werden können. Bei einer solchen Festlegung müsste die Konventionalfestlegung von μ_0, also die heutige Amperedefinition, fallengelassen werden. ■

ulrich.feller@eam.admin.ch

Referenzen

[1] U. Feller, Über Grössen, Einheiten und Einheitensysteme. OFMET Info Vol. 5, No. 1, 1998.
[2] Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM), Comptes rendus de la 9e session, p. 46, 1948. Bureau International des Poids et Mesures, Sèvres, France.
[3] Comité International des Poids et Mesures (CIPM), Procés-verbaux de la 46e session, 1946. Bureau International des Poids et Mesures, Sèvres, France.
[4] H. Stumpf und W. Schuler, Elektrodynamik. Vieweg, 1973, Braunschweig.
[5] Jackson J.D., Classical Etectrodynamics. J. Wiley & Sons, 1965, New York.
[6] B. Jeckelmann, W. Beer, Hat das Urkilogramm ausgedient? OFMET Info Vol. 5, No.2,1998.
[7] J. de Boer, On the History of Quantity Caiculus and the International System. Metrologia, Vol. 31, No. 6, 1995.
[8] D. Kind, T. Quinn, Metrology. Quo Vadis. Physics Today, August 1998.
[9] U. Feller, Hochgenaue Spannungen mit dem Josephsonnormal. OFMET 1 nfo 1, 1994.
[10] B. Jeckelmann und B. Jeanneret, Die Anwendung des Quantenhalleffekts in der Metrologie. OFMET Info Vol. 4, No. 2,1997.

Kurzfassung

Heutzutage ist die verwirrende Vielfalt der elektrischen Einheitensysteme fast gänzlich verschwunden und die älteren Systeme mit ihren ungradzahligen Exponenten in den elektrischen Einheiten werden kaum mehr angetroffen. In der neueren Literatur hat sich das Internationale Einheitensystem SI durchgesetzt.

Im vorliegenden Artikel wird gezeigt, welche Erkenntnisse den elektrischen Einheiten zugrundeliegen, und wie die Einheiten in den verschiedenen Einheitensystemen festgelegt sind. Erläuterungen zu diesem Thema sind auch heute, fünfzig Jahre nach der Billigung der Amperedefinition durch die Conférence Général des Poids et Mesures immer noch aktuell, da der eigentliche Zweck der Amperedefinition in vielen Darstellungen nicht adäquat zum Ausdruck kommt. Zuletzt wird auf die Bedeutung des Josephson- und des Quantenhalleffekts für die Darstellung der elektrischen Einheiten im Rahmen des SI eingegangen.

Résumé

Aujourd'hui la multitude confuse de systèmes d'unités en électricité a largement disparu et les anciens systèmes avec leurs facteurs fractionnaires ne se rencontrent pratiquement plus en électricité.
Le Système International d'Unités (SI) s'est imposé dans la littérature moderne.

L'article montre quelles connaissances fournissent la base des untités électriques et comment les unités sont fixées dans les différents systèmes d'unités. Cinquante ans après l'adoption de la définition de l'ampère par la Conférence Générale des Poids et Mesures le thème garde son actualité car le but propre de la définition de l'ampère n'est pas illustré de manière adéquate dans de nombreuses présentations. Pour terminer l'article se penche sur l'importance des effets Josephson et Hall quantique pour la réalisation des unités électriques du SI.

Riassunto

Oggi la molteplicità irritante di sistemi d'unità elettriche è scomparsa quasi completamente e non s'incontrano piú, nelle unità elettriche, i vecchi sistemi con gli esponenti frazionari. Nelle pubblicazioni recenti si è imposto il Sistema unitario internazionale (SI).

Nel presente articolo si mostra quali conoscenze stanno alla base delle unità elettriche, e come queste vengano stabilite nei diversi sistemi unitari. Cinquant'anni dopo la concessione della definizione dell'ampere da parte della *Conférence générale des poids et mesures*, le dichiarazioni su questo tema sono ancora oggi attuali. Infine viene trattata l'importanza dell'effetto Josephson e di quello quantico di Halle per la rappresentazione delle unità elettriche nell'ambito del SI.

Summary

Nowadays the confusing multiplicity of systems of units in electricity has nearly completely disappeared and the old systems with their fractional factors are practically never seen any more. The International System of Units (SI) has made a breakthrough in all modern litterature.

The present paper shows which knowledges build the basis of the electrical units and how the units have been fixed in the different systems of units. Fifty years after the adoption of the ampere definition by the Conférence Générale des Poids et Mesures the subject remains interesting because the real aim of the ampere definition is not adequately highlighted in many presentations. At the end of the paper, the importance of the Josephson and of the Quantumhall effects for the representation of the SI electrical units is explained.

Aufgaben und Schwerpunkte

Das Eidgenössische Amt für Messwesen (EAM) realisiert und vermittelt international abgestimmte Masseinheiten mit der erforderlichen Genauigkeit. Es beaufsichtigt die Verwendung von Messmitteln in den Bereichen Handel, Verkehr, öffentliche Sicherheit, Gesundheit und Umweltschutz. Es überwacht den Vollzug durch die Kantone, instruiert und berät Eichmeister und Eichstellen. Forschung, Industrie und Gewerbe stellt es seine Dienstleistungen zur Verfügung. Es leitet den Schweizerischen Kalibrierdienst (SCS) und betreibt die Schweizerische Akkreditierungsstelle (SAS).

Nationale Messbasis als Fundament

Mit nationalen Normalen, den national genauesten Referenz-Messmitteln, stellt das EAM die meisten der in der Schweiz benötigten gesetzlichen Masseinheiten dem Anwender zur Verfügung. Wichtige Einheiten, wie etwa der Meter, die Sekunde oder das Ampere werden mit physikalischen Experimenten auf atomare Vorgänge oder Naturkonstanten abgestützt.

Dieses Vorgehen ermöglicht eine sehr hohe Genauigkeit, unabhängig von Ort, Zeit und Material.

Aufsicht so viel wie nötig

Das EAM beaufsichtigt die Gesetzgebung über das legale Messwesen, führt Bauartprüfungen und Zulassungen von eichpflichtigen Messmitteln durch, leitet den Schweizerischen Eichdienst (SVS) und schliesst dessen Referenz-Messmittel an den nationalen Normalen an. Der SVS umfasst heute insgesamt 120 kantonale Eichämter und vom Bund ermächtigte private Eichstellen.

Dienstleistungen wo gewünscht

Das EAM stellt auch ausserhalb des gesetzlichen Bereichs die Einheiten zur Verfügung. Es prüft die Referenz-Messmittel der Kalibrierlaboratorien von Industrie, Gewerbe und Handel, von Dienststellen bei Bund und Kanton sowie in der Forschung und Entwicklung. Über 70 nach EN 45001 akkreditierte Kalibrierlaboratorien sind heute im vom EAM geführten SCS vereinigt.

Akkreditierung ein Teilbereich des EAM

Dem EAM sind auch Aufbau und Betrieb der Schweizerischen Akkreditierungsstelle (SAS) übertragen worden, welche die Kompetenz von Labors und Stellen in den Bereichen Kalibrieren, Prüfen, Inspizieren und Zertifizieren nach EN 45000 begutachtet und akkreditiert.